Aufgabenkatalog Algebra – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Lineare Unabhängigkeit, Erzeugnis**
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (1)
Überprüfen Sie, ob die folgenden Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind. Berechnen Sie jeweils die Linearkombinationen $u_1 := 3v_1 + 2v_2 - 4v_3$ und $u_2 := 2v_1 - 3v_2 + 5v_3$.

a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

e) $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Begründen Sie, wieso niemals mehr als drei dreidimensionale Vektoren linear unabhängig sein können. Verallgemeineren Sie die Argumentation auf n-dimensionale Vektoren.

Aufgabe 2 (3)
Die Menge $S_1 := \{a, b, c : a, b, c \in \mathbb{R}^3\}$ sei linear unabhängig. Zeigen Sie, dass dann auch die Menge $S_2 := \{a, a+b, a+b+c\}$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 3 (3) *Lineare Unabhängigkeit*
Es seien $v_1, ..., v_n$ paarweise verschiedene Vektoren in einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Welche der folgenden beiden Aussagen ist immer richtig und welche im Allgemeinen falsch? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) Genau dann sind v_1 und v_2 linear unabhängig, wenn $v_1 + v_2$ und $v_1 - v_2$ linear unabhängig sind.

b) Sind je $n-1$ Vektoren aus der Menge $M := \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist M linear unabhängig.

Aufgabe 4 (1)
Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ und die folgenden Teilmengen:

a) $M_1 := \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ b) $M_2 := \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ c) $M_3 := \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\}$

Zecihnen Sie die Erzeugnisse dieser Mengen in den $\mathbb{R}^2$. Was bedeutet lineare Unabhängigkeit zweier Vektoren im $\mathbb{R}^2$ geometrisch?

Aufgabe 5 (2)
Gegeben seien die Polynomfunktionen

$$f_1 = 2x^2 + 1, f_2 = x^2 - x \text{ und } f_3 = 2x + 1$$

aus $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Überprüfen Sie, ob f_1, f_2, f_3 linear unabhängig sind. Das heißt, rechnen Sie nach, ob aus $a \cdot f_1 + b \cdot f_2 + c \cdot f_3 = 0$ folgt, dass $a = b = c = 0$ gilt.

Tipp: Stellen Sie zunächst die obige Gleichung auf und multiplizieren aus. Dann klammern Sie die verschiedenen x-Potenzen aus. Daraus können Sie dann ein LGS ableiten.